

論文

# オプション価格決定理論における時間概念

椿 井 真 也\*

## 1. 概括的序論

### 1- (1). 経済学と時間

経済学は、「時間」の概念について、それが経済学の理論上の帰趨を決するほどの重要性を持つことが薄々認識されながらも、その考察を欠いていると言われてきた。もっとも、新古典派経済学の黎明期の理論家の一人である Alfred Marshall (1824-1942) は、「時間 (の概念)こそが、経済学における最も重要な難問の多くの根源となっている」と述べ、経済学の理論における「時間」概念の重要性を示すために、資本設備が一定であるような期間である「短期 (short-run)」とそれが変化しうる期間のことである「長期 (long-run)」といった期間区分を設けている<sup>1</sup>。Joan Robinson (1903-1983) も、「論理的時間」と「歴史的時間」の区別の必要を説き、Paul Samuelson (1915-2009) に対して、彼が時間対称な「論理的時間」と時間非対称ないわば「時間の矢 (arrow of time)」を持つことが必要条件である一般に考えられている「歴史的時間」という二つの時間概念を区別せずして理論構築していることを批判している<sup>2</sup>。その他、数多の経済学者が「時間」概念の取り扱いについて考察を深めねばならないことを自覚していたが、経済学者による具体的な時間論はほとんどないのが実情である。

### 1- (2). 問題の所在

新古典派経済学における「時間」概念の取り扱い方に対する幾多の理論的な面での批判はあるものの、逆に批判者たちの「時間」を取り込んだ理論体系が構築されている気配はない。すなわち、そこで批判されている内容は、畢竟「歴史的時間」概念の欠如をいうばかりで、そうした「歴史的時間」を取り込んだ理論体系の構築によって何らかの理論的分析が可能となるほどの整合的なシステムがほとんど整序されていないのである。この点ではむしろ、意識的であるかそうでないかは別として、新古典派の理論体系の前提する「時間」概念が、当該理論の枠組みの中における分析の中で何らかの役割を果たし、その分析結果に直接間接を問わず影響している姿を読み取ることができるのである。中でもデリバティブ理論は、新古典派経済学の、それも Kenneth Arrow (1921-) や Gerard Debreu (1921-2004) の設定した極めて技術的に整序された領域において先鋭化されてきた。デリバティブ理論における価格決定機構は、一般均衡理論に前提されている経済合理性を持つ市場参加者の裁定行動をモデル化した抽象的理論体系である。ところが、高度に抽象化された理論が一体何を記述しているのか、その意味論がほとんど展開されないまま実用化されているのが現状である。中でもオプション取引を取り上げる理由は、現時点で決められた条件ないし状態が、将来のある時点で実現した場合、それを請求できる権利 (いわば条件付請求権) を売買するのがオプション取引であり、そのプレミアムは、「本質的価値」と「時間価値」の統合であるという点で、本質的に「時間」概念と密接不可分に絡み合っているからである。オプション・プライシング理論は、一見したところ、ほぼ全面的に物理学理論の中の解析力学や数学の理論の中の確率過程論で塗り固められた高度に抽象化された理論体系であるため、どこに概念的な混乱が潜在しているか見えにくい。

そこで本稿では、このデリバティブ理論とりわけオプション価格決定理論が、どのような形で解析力学や確率過程論を摂取して成立したのかを分析しながら、特にその中での「時間」概念の取り扱い方に注視して、理論に内在

---

キーワード：時間、オプション価格決定理論、確率過程、ブラック・ショールズ方程式

\* 立命館大学大学院先端総合学術研究科 2013年度3年次転入学 生命領域 日本学術振興会特別研究員(DC2)

する概念的混乱を哲学的分析にかけて検討していくことを目的とする<sup>3</sup>。

考察によって明らかにしたいことは、以下の二つである。オプション理論の背景にはブラウン運動の理論がある。ブラウン運動自体は1872年にRobert Brown (1773-1858)によって発見されたが、理論的定式化に成功したAlbert Einstein (1879-1955)は、確率分布の方程式として熱伝導方程式と同じ形の拡散方程式を導いた。さらにPaul Langevin (1872-1946)は、Newtonの運動方程式にランダム変数を加えた「ランジュバン方程式」を考案し、確率の分布でなく粒子の軌跡そのものを記述した。これが、その後の伊藤清による確率偏微分方程式の原形となっている点を簡単なモデルとそれを表現する方程式を用いながら説明することを試みる。「伊藤のレンマ」からブラック・ショールズ方程式への導出過程において、時間対称な決定論的要素と拡散現象の時間不可逆性という相矛盾する要素が混在している次第を取り出す。この拡散現象の時間不可逆性は確率論的な遷移における時間不可逆性であって、ここでいう「歴史的時間」とは、少なくとも非対称な「時間の矢」を持つことが最も重要な必要条件として考えられているところの時間概念である。もっとも、「時間の矢」を持つことが「歴史的時間」であるための十分条件というわけではない。何が「歴史的時間」として観念されている「時間」であるかを正確に記述するには膨大な作業量を要するに違いない。だが、最低限指摘できるであろう「歴史的時間」の特質は、その非対称な「時間の矢」を持つように現象し、かつ我々はそのようなものとして現に認識しているということである。そしてこの「時間の矢」が確率論的な遷移における不可逆の時間に結びつけられる所以は、我々が日常において、一方の時間方向には認めない推論を逆の時間方向には認める一種の「ダブルスタンダード」に基づいて行動しており、この「ダブルスタンダード」とは、かつてBoltzmann (1844-1906)が熱・統計力学におけるH定理<sup>4</sup>を導出する際に暗黙の前提として誤って導入してしまった「衝突前の分子の位置と速度は相関がなく、それゆえ、衝突する粒子がそれぞれある速度を持っている確率は、それ自体としては独立している」という仮定（いわゆる「衝突数の仮定 (Stosszahlansatz)」）と同様の確率論的な時間非対称な仮定に基づいて行動していることである<sup>5</sup>。つまり、ある2つの物が衝突するという出来事を経験するとき、この2つの物が衝突前には相関していないが、2つの物が衝突の結果としてある速度になったということを暗黙の前提にしているということである。だからこそ我々は、速度 $v_1$ の粒子と速度 $v_2$ の粒子が衝突する頻度は、単に粒子が速度 $v_1$ を持つ相対頻度と別の粒子が速度 $v_2$ を持つ相対頻度の積で表示されるのは、衝突前には相関がなく、衝突後には相関があるという根深い前提があることの証左でもある。「歴史的時間」は少なくとも非対称な「時間の矢」を持つことが必要条件とされており、かかる非対称な時間が、確率論的な遷移における不可逆の時間に結びつけられているというのは、このような意味においてである。

もう一つは、確率論的な価格変動方程式の特定は可能になっておらず、それゆえ、デリバティブの理論体系は、未来の予測価格を決定するものとはなっていないことである。既に市場に存在する構造にインプライドされたものでしかなく、結局は価格変動機構そのものの解明がなされず仕舞いになっていることから裁定機構から一步も踏み出せていない。それゆえ、現在の市場構造が指し示す「未来」の価格を分布の平均と決め込んで理論構築しており、現実に存在する価格構造は原因ではなく結果であるのだから、この結果を原因としてモデル構築したところで価格変動機構を説明したことにならず、畢竟理論から逆算される「時間」と実際の「時間」を混在させて理論構築がされているという概念的混乱が見られることを明らかにする<sup>6</sup>。

## 2. 解析力学と新古典派理論の徹底としてのオプション理論

### 2-1. オプション取引の概要

ここで改めて基本的事項の確認をしておこう。オプションとは、「特定の前資産を決められた価格で、一定期間内で売買する権利」と定義される。現代の金融市場では、先渡取引 (Forwards) とオプション取引 (Option) あるいはこれらを複合した金融取引をデリバティブ (金融派生商品) と呼ぶ。

先渡取引とは、例えば1年先の為替レートのように、まだ実現していない将来価格を現時点で確定してしまう取引である。また、現時点で取り決められた条件ないし状態が、将来のある時点で実現した場合、それを請求できる権利 (いわば条件付請求権) を売買するのがオプション取引である。前者と後者の違いは、前者では6ヶ月先の外国為替レートを100円/USドルで購入した場合、6ヶ月後に外国為替レートが120円になろうが80円になろうが、

100円で購入（実際は差額決済）しなくてはならないのに対して、後者は、あくまで権利なので、実際の相場が80円ならば、無理して100円で買う義務はない点が異なる。それゆえ、一見して後者は前者に比べて有利な取引である。そこで、この有利な権利に値がつくわけで、この値がオプションのプレミアム（Premium）と呼ばれる。オプション取引とは、このプレミアムを売買する取引であると言える。

オプション取引が、条件付請求権の一種であることは既に確認した。金融市場において最も重要な条件とは、相場の挙動つまりは価格の上昇下落である。したがって、オプション取引では、行使価格（Strike Price）を設定して、それを条件請求の引き金とするわけである。ここで、相場が上昇して行使価格を上回った場合、あらかじめ取り決められた条件で請求できる権利を「コール・オプション」と呼び、反対に行使価格を下回った状態で効力を発揮する請求権売買を「プット・オプション」と呼び、オプション取引の持つ価値である「プレミアム」は、取引開始時点から先払いされる。

さらに、オプション取引は、「ヨーロピアン・オプション」と「アメリカン・オプション」に大別され、前者は満期時点でのみ行使可能であるが、後者は満期以前でのいつでも行使可能である。満期時点にのみ行使できる「ヨーロピアン・オプション」は「アメリカン・オプション」に比べて一見不利なように思えるが、しかしオプションの価値が何から構成されているのかという点を分析すれば、両者の利益上の差異はあまりないことが理解できる。オプション期間内である時点で定位して、その時点でオプションを行使した場合に享受できる価値が「本質的価値（Intrinsic Value）」とするならば、このオプションには3ヶ月までの残存期間があり、その残存期間中に値上がり（値下がり）する価格変動性がある、この価格変動性を持つ潜在的価値である「時間価値（Time Value）」も同時にオプション・プレミアムを構成していることになるからである<sup>7</sup>。

こうしたオプション・プレミアムの算出根拠がどこにあるのか。オプション取引は、ある種の保険であると捉えることができるので、保険料計算が利用できる。そうすると、保険料計算では、将来に生起する条件／状態の確率分布と、それが生起した場合に支払われる保険金額がわかれば、保険料を計算することができる。この考えは、明らかに数学的期待値の計算方法に他ならない。市場参加者のリスク選好は主観的であるならば、客観的なオプション・プレミアムの計算は不可能である。ブラック・ショールズ・オプション・プライシング・モデルは、リスクのある金融取引においては市場参加者の主観的リスク選好を考慮に入れて、将来の状態の確率分布がわかっており、確率理論を利用して保険料のように数学的期待値を計算したとしても万人がフェアであると認めるわけではないというのが経済学の見解であるが、オプション取引にはリスクはないという仮定をおき、この問題を回避する。ブラック・ショールズ方程式とは、後に触れる通り、原資産の価格がブラウン運動することを仮定しつつ、リスク中立確率の下で、オプションの行使価格、行使期間、ボラティリティなどに一定の前提を置いて、確率微分方程式を解くと同時に市場の金融資産の裁定関係を利用してオプション価格を求める方程式である<sup>8</sup>。

## 2- (2). 解析力学と確率過程論の摂取

古典力学における物体の運動方程式は、微分方程式で表現される。経済学の理論では、概して物体を価格ないしは金利に置き換え価格変動方程式を立式するが、その数学的構造に変化はない。決定論的なNewtonの運動方程式に登場する外部からの力を確率的なもののみならずことで確率論的なLangevinの運動方程式が得られ、これも価格変動理論にも適用されうる。決定論的な運動方程式では、 $t$ 時間後の物体の位置が確定的に予測されるので、仮に決定論的な価格変動方程式なるものが特定できたなら、価格も確定的に予測されるはずである。確率論的な運動方程式では、 $t$ 時間後の物体の位置は確率分布で表されるので、確率論的価格変動方程式なるものが特定できれば、価格についても同様のことがいえるはずである。

では、確率論的な価格変動方程式なるものの特定は可能なのであろうか。この問題に答えるためには、まず経済学、中でも数学的に最も精緻化された新古典派経済学及びその理論的核心部分を最も洗練させているデリバティブ理論が如何にして解析力学や確率過程論をその理論的骨格として摂取してきたのかを確認しておかねばならない。

新古典派経済学は、価格決定メカニズムを探求するも、貨幣中立性<sup>9</sup>の前提に立ち、貨幣なき商品間の交換比率のみを取り上げ、制約のある資源の下での経済主体の効用や利潤の最大化を問題とする。それゆえ、問題の数学的定式は「制約条件付き最大化問題」の形をとる。

最大化すべき関数  $f(x)$  を目的関数として、資源制約式である  $g(x) = b$  と組み合わせて、ラグランジュアン  $L(x, \lambda)$  をつくる。

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda(b - g(x))$$

未定乗数  $\lambda$  は、 $b$  の変化に対する経済主体の満足度  $f$  のセンシビリティを表現し、生産サイドで考えると、 $b$  は彼らが保有する生産資源量であり、 $f$  は利潤である。すなわち、未定乗数  $\lambda$  である  $b$  の変化に対する  $f$  のセンシビリティとは、生産資源を新たに一単位追加した場合、利潤がどれだけ増加するかということに他ならない。ということは、未定乗数  $\lambda$  は、生産資源の価格を暗黙の裡に意味していたことになる。もし、デリバティブのトレーダーが生産者ならば、まず利潤を最大化する未定乗数  $\lambda$  を算出し、生産資源の理論価格を求めよう。次に生産資源市場を見て、市場での生産資源価格が  $\lambda$  より高ければ保有している生産資源を売却し、逆の場合には、市場価格が  $\lambda$  になるまで生産資源を購入する（もっとも、この前提には「セイの法則<sup>10)</sup>」が妥当することが含まれている）。このような裁定行動を実行することだろう。

裁定理論は金融商品間の相対的価格評価理論として発展したので、当然に生産者及び消費者が登場する伝統的経済学の理論とは異なるように見えるものの、数量制約条件下での満足度最大化という一般均衡理論の枠組みに完全に収まっている。この Lagrange の未定乗数法 (Lagrange Multiplier) は、「時間」を考慮しない最も単純な最適化手法である。制約条件が等号で結ばれているので、古典力学の文脈に置きなおすと、ヘルツのいうホロノームな束縛条件に対応すると考えられるので、ホロノームな束縛条件の中でも時間  $t$  を考慮しない場合をスクレノーマス、他方時間  $t$  が含まれている場合をレオノーマスということになる。新古典派経済学は、古典力学の類比により成立していることが改めて確認されるだろう<sup>11)</sup>。

新古典派経済成長理論の場合、将来を考慮した満足度最大化が焦点化されるので、古典的プログラミングの動学化が不可欠となる。オプション理論の場合には、満期時点までの最適行動を確定する動学的最適化の問題意識である。この動学的最適化において最もよく用いられるハミルトン力学の最大値原理の手法における特徴の一つは、時間  $t$  を他の変数と同様に、すなわち空間座標が一つ追加されたものとして扱い、不可逆性をその本質とするいわゆる「歴史的時間」を捨象することである。こうすることによってはじめてオプションの価格決定が可能となっているのである。

### 2-(3). オプション理論とブラウン運動の理論

オプション理論の背景にはブラウン運動の理論がある。デリバティブの原資産に該当する株や債券などの金融資産の変動は、花粉粒子の運動と平行にブラウン運動に従うとの仮定があるからである。物理学は、自然現象を客観的に記述し、その背景にある法則を探求することを目的にして、自然現象を支配している運動方程式の発見に勤しむ<sup>12)</sup>。とりわけ、古典力学が支配する世界では、自然現象に存在する唯一の経路（軌跡）の発見が望まれる。同様に、株価の経路がただ一つしかないとは仮定する金融理論では、株価収益率や株価純資産倍率などの諸計数が入力されさえすれば将来の株価を予測することができるようになることを理想とする。しかしながら、明日の天候を予測することが難しいのと同様に、将来の株価等を予測することはほぼ不可能に近い。ただ、株価の経路を統計的に分析する手法を考えることはできそうである。株価の経路を、ある点から点への移行と考えるのではなく、株価を確率分布で記述できる統計集団として捉えることである。

ブラウン運動自体は 1872 年に Robert Brown によって発見されたが、理論的定式化に成功したのは 1905 年の Einstein の論文である<sup>13)</sup>。Einstein は、確率分布の方程式として熱伝導方程式と同じ形の拡散方程式を導いた。Langevin は、Newton の運動方程式にランダム変数を加えたランジュバン方程式を考案し、確率の分布でなく粒子の軌跡そのものを記述した。

ブラウン運動の理論の核心となる揺動散逸定理は、物理過程としてのブラウン運動の背後にある物理法則であり、一般的な過程としてのブラウン運動を記述する拡散方程式を価格変動に適用する基本的考えを以下のような簡単な例で説明することができる。

上下にランダム・ウォークする粒子（価格）をモデル化してみよう。ところで「ランダム・ウォーク」という概

念は、酩酊者が千鳥足で歩行する様を数学的に記述できるかという問題が提起された際に生まれた概念である。経済データを対象とする研究の目的は、酩酊者の千鳥足を発見することではなく認識可能なパターンを見つけることであったが、統計学の展開に連れてかえって先物価格のデータがランダムである可能性に着目され、ブラウン運動のようなランダム過程に関する理論が例えば先物価格のデータなどのような経済的に関するデータの分析に対しても適用できると考えられるようになったわけである。その結果として、経済現象における個々の現象の特性の間における規則性と一貫性によってすべて記述できると解するのではなく、むしろ個々の現象の特性の間においては予測不可能なランダム性を認めないわけにはいかないという認識が広まった。そこから、価格の運動はランダムであるという仮定に基づき、それに粒子の運動のランダムな過程に準えてブラウン運動の理論の骨格を形成する揺動散逸定理の考えが適用されると考えられるのが、いわゆる「ランダム・ウォーク仮説」である。

さて、オプション理論の2項格子と同様、粒子（価格）は上昇か下降しかない。ここで、上昇確率を  $p$  とし、下降確率を  $q$  とする ( $p+q=1$ )。ステップ幅を微小時間  $\Delta t$  の間には  $\Delta x$  しか移動できないと定義する。このような仮定のもとで、時点  $t+\Delta t$  において、粒子（価格）が  $x$  に存在する確率  $W(x, t+\Delta t)$  は、上昇、下落の各々の確率が与えられるので、

$$W(x, t+\Delta t) = pW(x-\Delta x, t) + qW(x+\Delta x, t)$$

という方程式を立式することができる。Einstein は、この式をテイラー展開して拡散方程式を導出したのである。導出過程は割愛するが、要は左辺に関しては時間  $t$ 、右辺は空間上の粒子の位置  $x$  でテイラー展開すると、

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (q-p) \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

となる。ここでは時間  $t$  に関しては2次以降、粒子の位置（価格水準） $x$  に関しては3次以降が切り捨てられている。この方程式は、「フォッカー・プランク方程式」と呼ばれるが、ここで上昇確率、下降確率が等確率であれば右辺の第1項は消去されるので、

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

という拡散方程式が導出される。W は粒子（価格）の存在確率であるが、これを熱の分布だと考えれば熱伝導方程式となる。

さて、再び「フォッカー・プランク方程式」を顧みると、右辺の第1項は上昇確率、下降確率のずれから生じるので、上昇確率 > 下降確率の場合は粒子（価格）の拡散は上方へ揺動し、逆の場合は下方へ揺動する。したがって、右辺の第1項は拡散の漂流速度（Drift Velocity）を表現していることになる。ここで漂流速度を規定する係数  $(q-p) \frac{\Delta x}{\Delta t}$  は定数であるが、この係数を空間や時間に依存する変数にすれば、多様な拡散運動を構成することができる。次に、漂流速度0の拡散方程式を考えてみる。ここで係数  $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$  は拡散（熱伝導）係数であって、拡散の広がりはポラティリティを規定していることになる。

以上は個々の粒子（価格）でなく存在確率分布の時間発展であるが、個々の粒子（価格）については、ある時点にはある一点にしか存在しえない。そこで、ランダムに変化する粒子（価格）の記述を考えることが必要になるはずである。決定論的な Newton の運動方程式では、粒子の速度は無限小時間あたりの位置変化であるから、

$$\frac{dX(t)}{dt} = v$$

となるが、Langevin はブラウン運動の記述にあたって Newton の運動方程式に外部から加わるランダムな揺動力を足して、以下の「ランジュバン方程式」を立式した。外部揺動力を  $F(t)$  とすると、

$$\frac{dX(t)}{dt} = v + F(t)$$

と表現できる。形式は異なれど、Einstein が導出した拡散方程式と同一の対象を記述する双対性を示していることが理解される。

こうしたブラウン運動の理論の中核となる考えは、Andrey Kolmogorov (1903-1987) によるマルコフ過程論により数学的に整序された形でチャップマン・コルモゴロフ方程式として定式化されたわけであるが、いずれにせよ、デリバティブ理論における出発点は、ブラウン運動の理論から帰結する拡散方程式と確率過程論にあることが理解できる。

オプション価格決定の理論に何故ブラウン運動の理論の利用が可能であるといえるのか。上記の理論構造上の類似性だけでは金融理論内部の議論ではともかく、科学哲学的立場からすればなお疑問が残る点が存在することも確かである。というのも、オプション価格決定理論の前提条件であるランダム・ウォーク仮説における過程は離散的な確率過程であるのに対し、ブラウン運動は連続時間の確率過程だからである。離散時間のランダム・ウォークと連続時間の確率過程であるブラウン運動との関係の問題である。

ところがこの問題は、オプション価格決定理論の創始者ともいべきフランスの数学者 Louis Bachelier (1870-1946) によって半ば解決されていたとみることができる。すなわち Bachelier は、フェアな賭けの成立する数学的モデルを構築するにあたって、当該モデルが満たすべき制約条件<sup>14</sup>をもとに、株価の変動分布につき正規分布の確率密度関数を導入して、離散的な時間間隔の株価の変動分布の式の極限をとっても連続時間の確率過程であるブラウン運動の概念に一致すること示すことに成功しているからである。

### 3. ブラック・ショールズ・モデルにおける2つの時間概念

確率微分方程式論におけるいわゆる「伊藤のレンマ」とは、単純化して整理すると、ある確率過程  $X(t)$  とそれに依存するもう一つの確率過程  $Y(t)$  の関係を記述する公式である<sup>15</sup>。すなわち、

$$Y(t) = f(X(t), t)$$

ある確率過程  $X(t)$  をオプションの対象商品とすれば、その動きに依存する確率過程  $Y(t)$  は、条件付請求権たるオプションの値動きと理解することができる。例えば、指数的に成長する経済変数をグラフで表現すると、極端な右上がりになるので、我々は通常、対数変換して表現するはずである。すなわち、もとの経済変数を  $X(t)$  とすると、対数変換された変数  $Y(t)$  は、

$$Y(t) = \log X(t)$$

である。次に、この経済変数の成長速度を表現するために両辺を時間微分してみると、

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{X dt}$$

となる。ここで右辺は、以下の手順で得られる。

重要な点は、直接微分できない場合は迂回経路を経るという点である。その迂回経路の役割を果たしているのが「合成微分律」である。微積分学の基本公式であるこの「合成微分律」を確率微積分学において同様の役割を果たすものを作り出したところに伊藤清の革新があった。デリバティブ理論にとっては、デリバティブとはそもそも対象となる金融資産から派生した金融商品であるので、その価格  $Y$  は対象資産価格  $X$  を変数にした関数である。しかも同時に、対象証券価格  $X$  は時間  $t$  の関数でもあるので、結局デリバティブは対象資産価格と時間の合成関数である。但し、価格変動は確率過程なので、単純に決定論的な「合成微分律」を適用できる保障はない。その意味で、デリバティブ理論にとって有意味であったわけである。「ウィナー過程 (Winner Process)」に従う確率過程  $X(t)$  とそれに依存するもう一つの確率過程  $Y(t)$  の関係を見ると、

$$Y(t + d) = f(X + dX, t + dt)$$

$$dX = \mu dt + \sigma dZ$$

と書け、ここでの  $dX$  は確率過程であるので、伊藤清が証明した計算規則<sup>16</sup>を利用して、 $f(X + dX, t + dt)$  をテイラー展開すると<sup>17</sup>、最終的に

$$dY = \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dX^2$$

$$dX = \mu dt + \sigma dz$$

が得られる。

ここで、この確率過程の応用を考えるとしよう。 $dX = \mu dt + \sigma dz$  を指数変換して得られる確率過程  $Y$  があるとす。換言すれば、過程  $Y$  の対数変換が確率過程  $dX = \mu dt + \sigma dz$  に従うということである。そうすると<sup>18</sup>、「伊藤のレンマ」を使い、

$$dY = e^X dX + \frac{1}{2} e^X dX^2 = e^X (\mu dt + \sigma dz + \frac{1}{2} \sigma^2 dt)$$

となり、

$$\frac{dY}{Y} = \left( \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

と整理される。これはブラック・ショールズ方程式で仮定されている価格変動モデルである。ここでは、 $X$  は金利や外国為替などの対象資産価格であり、 $X$  の挙動がランジュバン方程式という確率微分方程式によって、 $dX = \mu dt + \sigma dz$  のウィナー過程として記述できるという仮定があったことを想起されたい。これは本来、速度  $\mu$  で運動する物体の挙動を記述する方程式であるが、確率過程であるから将来の位置はあくまでも確率分布（平均  $\mu t$ 、標準偏差  $\sigma\sqrt{t}$  の正規分布）でしか予測できないことを示しているはずである。伊藤清の計算規則では、 $dz^2 \rightarrow dt$  であるからといって、その逆、すなわち  $dz = \sqrt{dt}$  は成り立たない。というのも、 $dz$  は確率過程だからである。対して、 $\sqrt{dt}$  は決定論的過程であり、拡散現象の時間不可逆性に関与しているように見えるのである。ウィナー過程の特徴の一つは、このように2乗すれば時間微分  $dt$  となるところである。つまり、確率過程だったものが決定論に変化しているのである。

もっとも、元来平均0、標準偏差1の確率過程だったのだから、この点を考慮して、平均0、標準偏差1の確率変数を  $\delta$  として、

$$dz \rightarrow \delta\sqrt{dt}$$

と置いてみる。この関係から、

$$(dX)^2 = \mu^2(dt)^2 + 2\mu\sigma(dt)(dz) + \sigma^2(dz)^2 = 2\mu\sigma\delta(dt)^{3/2} + \sigma^2\delta^2 dt$$

となる。ここでも、 $(dt)^{2/3} \rightarrow 0$  として、

$$(dX)^2 = \sigma^2\delta^2 dt$$

を得る。わざわざ導入した確率変数  $\delta$  であるが、平均は0なので、期待値をとれば、

$$(dX)^2 = \sigma^2\delta^2 dt = \sigma^2 dt$$

となって、結局なくなってしまう。そして、ウィナー過程がそうであったように、対象資産価格の微分  $dX$  は確率過程であるが、その2乗は決定論的過程となっているのである。

## 4. 結

これまでに確認したように、確率論と微積分学を融合した伊藤清の確率微分方程式の核心は、ブラウン運動の数学的定式化であるウィナー過程に関する3つの公式にある。とりわけ、ランダムであるはずのウィナー過程の微分  $dz$  の2乗が決定論的な時間微分  $dt$  と等価であるとする二次変分は、デリバティブの価格形成理論でも中心的な役割を果たしているものの、その整合的理解のための解釈は提示されてはいない。すなわち、「伊藤のレンマ」からブラック・ショールズ方程式への導出過程において、時間対称な決定論的要素と拡散現象の時間不可逆性という相矛盾する要素が混在しているのである。

もう一つは、確率論的価格変動方程式の特定は可能になっておらず、それゆえ、デリバティブの理論体系は、未来の予測価格を決定するものとはなっていないことである。さて、オプションのトレーダーが行使価格ごとに異なるボラティリティを入力してオプション価格を決定する。通常、オプションのトレーダーは満期の異なるオプションに対しては異なるボラティリティを入力する。1週間後に満期をむかえるオプションと1か月後に満期をむかえるオプションのプレミアムを計算する場合を想定してみる。そうすると、例えば2週間後に決算発表、3週間後に雇用指数等の大きな経済指標の発表が予定されているとするなら、今か1週間後よりも、1週間後から1か月後に株価は大きく変動しそうだから、この場合、1週間後に満期を迎えるオプション・プレミアムの計算に用いるボラティリティよりも、1か月後に満期を迎えるオプションに入力するボラティリティを高く設定しようと考えてみよう。このインプライド・ボラティリティの満期に対する変化の様子を「タイム・ストラクチャ (time structure)」というが、オプション価格決定のモデルは、既に市場に存在する上記タイム・ストラクチャに首尾よくはまるようにインプライドされたものでしかなく、結局は価格変動機構そのものの説明がなされず仕舞いになっている。それゆえ、現在の市場構造が指し示す「未来」の価格を分布の平均と決め込んで理論構築しており、現実に存在する価格構造は原因ではなく結果であるにもかかわらず、この結果を原因としてモデル構築したところで価格変動機構を説明したことにはならないはずである。つまり、既に存在する現在のタイム・ストラクチャが指し示す時間をあたかも「未来」の時間であるかのように予め埋め込まれているということである。ここにおいても、理論から逆算される「時間」と実際の「歴史的時間」を混在させて理論構築されているという概念的混乱が見られるのである。

このように、新古典派理論の究極ともいべきオプション価格決定理論には、「時間」の概念に関する混乱が見られる。その混乱は、本稿の直接的考察対象にはならなかったものの密接に関連する2つのコルモゴロフ方程式の解釈も含め、なお科学哲学的分析を遂行する必要があるだろう。その問いに答えるためには、そもそも確率過程と時間の関係を解明するという大問題への接合なしにはかなわないものであろうと思われる。

## 【注】

- 1 [Marshall,A. (1948)] 参照。マーシャルによる時間論は、不十分なものであった。というのも、長期という単位期間があたかも存在するかのように設定されているため、長期を別の静学に置き換えたにすぎなくなっていることや、長期が短期の連続であるという当然の事実が閑却され、真の動学化が図られるきっかけをつかみ損ねてしまった。
- 2 [Robinson,J. (1980)] 参照。なお、また、「新古典派」の依拠する前提を根底から批判したために一時は無視されるも、現在再評価されている Nicholas Rögen (1906-1994) は、経済学的前提する「時間」概念は「ニュートン力学」において前提された「絶対時間」または「持続なき瞬間の実数連続体としての時間」あるいは「無時間的時間」概念であり、「不可逆的」でかつ「持続」としての「時間」概念こそが時間の本質を捉えた概念であると主張する。その趣旨は、一般均衡理論は孤立系（閉鎖系）を前提とし、本来外部から低エントロピーの物質を受け取っていることを無視する誤りを犯し、それゆえ、実際の経済過程は均衡理論が想定する循環的なものではなく、一方向的なものである、というものである ([Rögen,N. (1971)] 参照)。加えて、「無時間的」時間概念を前提にすると意思決定の問題は解決不能となり、それゆえ一般均衡理論が「無時間的」時間概念に依拠する限りでは、現実の経済を分析するための理論として失格であると考えた George Shackle (1903-1992) による批判もある ([Shackle,G.L.S. (1968)] 参照)。
- 3 その前に一点、断っておくべきことがある。ブラック・ショールズ・モデルに代表されるオプション価格決定理論に対して投げかけられる経験からの反証と同様の批判を本稿で行うのが本稿の趣旨ではないという点である。モデルはあくまで現実世界の一面を切り取って、それを抽象化することによって成り立つ。だから、そもそも一つのモデルによって現実世界を説明することなど無理である。逆に現

実に適合させようとする、モデルが複雑化してしまい、もはやモデルとしての意味がなくなってしまうこともある。オプション価格の決定要因は①行使価格、②原資産価格、③満期までの時間、④ボラティリティ、⑤配当、⑥金利であり、これら6つの要因から実際にプレミアムを計算するプライシングモデルがブラック・ショールズモデルである。このモデルの前提する仮定は、①裁定機会の不存在、②無リスク金利の一定、③取引コストの不存在、④株の連続的売買可能性、⑤株の、一定の期待リターン $\mu$ およびボラティリティ $\sigma$ をパラメータとする幾何ブラウン運動という確率過程への従属、⑥無配当なヨーロピアン・オプションとしての株、というものである。Fischer Black (1938-1995) や Myron Sholes (1941-) そして Robert Merton (1944-) が仮定したモデルは、現在から将来までの連続複利表示されたリターンが正規分布に従うという幾何ブラウン運動である。しかしながら、とりわけ⑤の仮定は現実の正しい描写にはなっていない。将来の株価のリターンがとる確率分布は歪度 (Skew) や尖度 (Kurtosis) といったパラメータを持っているので、現実には対数正規分布に従わないからである。すなわち、市場価格の経験分布を正確に記述しようとする、平均及び標準偏差という2つのパラメータだけでは十分でない。現実のデータは、分布の形状が左右対称とは限らないし、分布の尖りが存在するので、さらに高次のパラメータが導入される必要があるというわけである。分布に対称性が保障されておらず、左右いずれかに歪んでいる場合、平均値からのズレの3乗平均をとることで対処する歪度は、正規化された確率変数によって定義され、分布の非対称性を意味する3次のモーメントとして機能するし、分布の尖りは平均からのズレの4乗平均で定義される、確率分布の裾の太さを意味する4次のモーメントとして機能する。ここで、これらパラメータをオプション価格決定モデルに内在させることも可能である。ただそうすると、極めて複雑なモデルとなってしまふだろう。より正確かつ複雑なモデルを選択するか、より単純なブラック・ショールズ・モデルを選択するかは、当該モデルが適用される問題状況と不即不離の関係にあるというべきである。しかしながら、本稿で問題にするのは、そのレベルではない理論内部の相互関係における概念的な混乱である。

- 4 H 定理導出の過程及びそれが含意するところを詳細に分析した優れた考察が [Zeh,H.D. (1992)] (pp.43-48.) である。
- 5 Huw Price は、こうした暗黙の時間非対称な仮定を一般化して 'the Principle of the Independence of Incoming Influences' と呼び、この暗黙の前提が時間の方向性を考える際の色眼鏡となって見る目を曇らせていると主張する ([Huw Price (1996)] p.26. 参照)。
- 6 なお、経済学が一応世界の実在を何らかの仕方で描写する理論たりうるのか、という認識論上の問題を避けて通ることはできないが、本稿では紙幅の関係上、そこまで踏み込んだ考察はしない。ただ一言しておくならば、およそ科学の理論であるというためには、当該理論が単に観察結果を予測するために利用される道具であるという道具主義的見解を、社会科学者を含め多くの科学者は採っていないのではないと思われるのである。というのも、科学の理論は確かに観察結果を予測するという重要な役割を担っており、予測の道具としての理論という側面もあるが、同時に説明としての理論という側面も併せ持つ。David Deutsch (1953-) の提起する適切な例によると ([Deutsch,D. (1997)] pp.3-13.)、そこに何かの実験内容を入力すれば直ちにその予測結果を弾き出す架空の「オラクル」という装置があったとして、我々はその「オラクル」を以て科学理論の代替物であるとみなすだろうかと問うのである。例えば、一般相対性理論が重要であるのは、惑星運動を Newton の理論よりも少しだけ正確に予測できるからではなく、空間と時間との不可分一体的な時空 (spacetime) の湾曲という、それまで思いもつかなかった実在の側面を明るみに出し、そのメカニズムを説明したことにある。科学理論は、我々の経験する対象と現象を、根底的には直接経験できない実在によって説明する。我々の経験する出来事を説明する能力が理論の最も貴重な属性ではなく、実在を説明している、あるいは説明せんとするところにある。経済学においても、極端な道具主義的見解を採用する Milton Friedman (1912-2006) の経済学方法論を批判した Paul Samuelson は、理論と当該理論の対象となる観察事実との対応関係を常に確保しなければならないと、理論が実在に対して一定のコミットメントをしなければならない旨主張している ([Samuelson,P. (1962)] p.232.)。
- 7 説明を敷衍する。コール・オプションは原資産を買う権利であるから、当然に安く買える権利の方に価値がある。つまり、行使価格の低いコールほど高い価値を持ち、プットの場合は逆に行使価格の高いも方に価値がある。アメリカン・オプションの場合、満期までならいつでもオプションを行使できるので、満期までの時間が長ければ長いほどコールもプットも高い価値を持つ。つまり、権利の及ぶ期間が長い方が価値があるということである。満期以前のオプションが持つボラティリティによる潜在的価値が時間価値であるので、満期以前に行使実行することは、当該時点で残存期間の時間価値を放棄することを意味する。もし合理的な市場参加者ならば行使ではなく、市場での売却を実行するだろう。この意味で、ヨーロピアン・オプションとアメリカン・オプションの間にはあまり違いがないということなのである。
- 8 ブラック・ショールズ・モデルでは、市場金利が国債金利と等価であるという前提を置き、偏微分方程式を解いてオプションの価格を計算する。もちろん、これは現実離れた仮想的な前提である。なぜそのような前提を置いてプライシングするかといえば、複数の金利を前提にして偏微分方程式を立式すると、それら偏微分方程式を解くことが困難だからである。それゆえ、すべての市場参加者が同一のリスク選好を行い、結果として無リスク金利を所与として裁定取引を行うことが方程式を解く条件となる。株価期待収益率をリスク・フリーの収益率に置換して確率微分方程式を解くことをリスク中立化法といい、リスク中立確率 (Risk Neutral Probability) とは、このブラック・ショールズ方程式で求められる仮想的理論値として確率としての解である。このリスク中立確率を前提としている点において、ある種の「時間」概念の論点先取的構造を読み取ることもできるかもしれない。つまり、リスク中立仮定を前提することでオプション価格の確率積分を計算することになるわけだが、[Cox and Ross (1976)] が明らかにしたように、ある時点における株価を与件とした他の時点での株価の分布関数の確率積分が、フォッカー・プランク方程式及び前進型コルモゴロフ方程式の逆方向の時間関係から記した後進

型コルモゴロフ方程式の解として導出できる。前進型だけではなく、なぜ時間方向が逆向きの後進型方程式が必要となるのか、またそれが、時間反転を許容する世界を描写するものでないとするならば、それらはいかなる意味を持つことになるのか。二つのコルモゴロフ方程式が「時間」についていかなる含意を持つのかについてはなお不可解な点が残る。今後の課題になろう。とまれ、前進型方程式は状態が遷移する前に定位して次点でいかなる状態になるかを記述するものと捉え、後進型方程式は状態が遷移した後の一点を固定する役割を果たしていると、とりあえず解釈することもできよう。

- 9 新古典派経済学は、もちろん経済学の主目的を価格決定メカニズムの探求においているわけだが、価値を比較するには商品間の交換比率だけわかればよく、貨幣量は単なる名目値を表示するものにすぎないと考える。こうした考えを貨幣の中立性という。
- 10 「供給は、それ自身の需要を生む」と簡略に要約されて理解されている古典派経済学の仮説である。経済学者である森嶋通夫（1923 - 2004）は、「セイの法則」が成り立つ社会は、ごく限られた時代のごく狭い範囲の社会でしかなく、現代は耐久財の占める割合が大きくなっており、耐久財は売買市場とレンタル市場を持ち、どちらか一方の市場では需給による価格調整が機能しなくなるので、「セイの法則」は成り立たない「反セイ法則」の時代であると主張する。[森嶋通夫（1994）] 参照。
- 11 哲学者である小泉義之（1954）は、檜垣立哉（1964）との対談の場（[小泉義之・檜垣立哉（2008）] 参照）にて、Philip Mirowski（1951-）の業績に触れながら、「経済学は解析力学の奇怪な応用である」と述べている。
- 12 もちろん、このような科学理論の捉え方は、いわゆる「科学的実在論」の立場に傾斜した捉え方である。[内井惣七（1995）]、[戸田山和久（2015）] 参照。
- 13 [Einstein,A.（1905）] 参照。
- 14 [Bachelier,L.（1900）] は、株価の正規分布としたがゆえに、株価がマイナスになるという背理を導く欠点を持っていた。これを株価収益率の正規分布として捉えなおしたのが、[Osborne,M.（1958）] である。
- 15 [伊藤清（2004）] 参照。思考の基本的な流れは、ブラウン運動を含む関数（確率微分方程式）を簡単な関数で近似し、この関数の極限として積分方程式を導いたものということができよう。
- 16  $dt^2 \rightarrow 0, dz^2 \rightarrow dt, dt \cdot dz \rightarrow 0$ 。この3つの式をテイラー展開に適用して得られる。
- 17  $f(X + dX, t + dt) = f(X, t) + \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} dX^2$  が得られる。
- 18  $Y = e^X, dX = \mu dt + \sigma dz$  とおく。

## 【参考文献】

(外国語文献)

- Bachelier, L. (1900), "Théorie de la speculation", *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* vol.3, no17, pp.17-78.
- Black, F and Scholes, M. (1973), "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, pp.637-654.
- Brown, R. (1827), "A brief Account of Microscopical Observations made in the Months of June, July and August", *Philosophical Magazine*, pp.161-173.
- Cox and Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics* 3. pp.145-166.
- Deutsch, D. (1997), *The Fabric of Reality*, Penguin Books.
- Einstein, A. (1905), "On the motion of particles suspended in a resting fluid demanded by the molecular theory of heat", *Ann. Phys.*, 1905. pp.549-560.
- Price, H. (1996), *Time's Arrow and Archimedes' point: New Directions for the physics of Time*, Oxford University Press.
- Ito, K. and McKean, P. (1974), *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer Verlag.
- Malkiel, B. (1990), *A Random Walk Down Wall Street*, Norton.
- Marshall, A. (1948), *Principles of Economics*, 8th edn, Macmillan.
- Merton, R. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science* 4. pp.125-144.
- Mirowski, P. (1984), "The Role of Conservation Principles in 20th Century Economic Theory", *Philosophy of the Social Sciences* (14) pp.461-473.
- Mirowski, P. (1989), *More Heat than Light*, Cambridge University Press.
- Osborne, M. (1958), "Brownian Motion in the Stock Market", *Operations Research* 7. pp.145-173.
- Rögen, N. (1971), *The Entropy law and the Economic Process*, Harvard University Press.
- Robinson, J. (1980), "Time in Economic theory", *KYKLOS*, Vol.33. pp.219-229.
- Samuelson, P. (1962), "Comment on Ernest Nagel's Assumptions in Economic Theory", *Papers and Proceedings of the American Economic Association*, December 29, 1962, pp.231-236.

- Shakle,G.L.S. (1968), *A Scheme of Economic Theory*, Cambridge University Press.
- Winston,G.C. (1988), "Three Problems with the Treatment of Time in Economics; Perspectives, Repetitiveness and Time Units", *The Boundary of Economics*, Cambridge University Press. pp.30-52.
- Zamagami,S. and Agliardi,E. (2004): "Introduction", *Time in Economic theory, An Elgar Reference Collection*, Edgar Elgar UK. pp.2-18.
- Zeh,H.D. (1992), *The Physical Basis of the Direction of Time,2nded*, Springer Verlag.

(邦語文献)

- 伊藤清 (1953)、『確率論』岩波書店。
- 伊藤清 (1976)、『確率論』(岩波講座基礎数学)岩波書店。
- 小泉義之・檜垣立哉 (2008)、「来るべきドゥルーズ」『現代思想』36 (15) 青土社 (2008.12) pp.112-125.
- 小暮厚之 (1996)、『ファイナンスへの計量分析』朝倉書店。
- 森嶋通夫 (1994)、『思想としての近代経済学』岩波書店。
- 二階堂副包 (1971)、『数理経済学入門』岩波書店。
- 佐藤茂 (2013)、『実務家のためのオプション取引入門——基本理論と戦略』ダイヤモンド社。
- 高安秀樹・高安美佐子 (2000)、『経済・情報・生命の臨界ゆらぎ——複雑系科学で近未来を読む』ダイヤモンド社。
- 戸田山和久 (2015)、『科学的事実論を擁護する』名古屋大学出版会。
- 内井惣七 (1994)、『科学哲学入門——科学の方法・科学の目的』世界思想社。

## Time on the Option Pricing Theories

TSUBAI Shinya

### Abstract:

In general, economic theories have been criticized because of its lack of consideration on the concept of time, although several attempts are suggested. As it is, the concept of time may be a problem of the first magnitude for economic theories. Especially, derivative theories have been sophisticated theoretically in the area of Neo-classical economics that was systemized mathematically by Kenneth Arrow and Gerard Debreu. But, the semantics what these abstract theories describe is hardly argued a point. As the option pricing theories including Black-Scholes model are highly abstract theoretical systems depending upon analytical mechanics and stochastic process theory, it is hard to understand where the conceptual confusion lies hidden. Therefore, the purpose of this paper is to analyze how the option pricing theories incorporate analytical mechanics and stochastic process theory into its theoretical models and to criticize the rough treatment with the concept of time by making a comparison with concepts of time included in several equations. This paper elucidates that the option pricing theories presuppose the two concepts of time which are incompatible with each other.

Keywords: time, option pricing theory, stochastic process, Black-Scholes equation

## オプション価格決定理論における時間概念

椿 井 真 也

### 要旨:

経済学は概して、「時間」の概念についての考察を欠いてきたと言われる。とはいえ、「時間」概念の取り扱い方こそ経済学の理論にとっての「落とし穴」である可能性がある。デリバティブ理論は、Kenneth Arrow や Gerard Debreu により数学的に体系化された新古典派経済学という領域において理論的に洗練されてきた。ところが、その理論についての意味論が展開されていない。特に、ブラック・ショールズモデルを含むオプション価格決定理論は、解析力学や確率過程論に依存した抽象的理論体系であるため、概念的な混乱の所在がわかりにくい。本稿では、オプション価格決定理論への解析力学や確率過程論の摂取過程を分析し、各方程式の「時間」記述を比較していくことにより、「時間」概念の粗暴な取り扱い方を批判することを目的とする。この考察により、オプション価格決定理論は互いに両立しない二つの時間概念を前提にしていることが明らかとなる。